حل المعادلة التربيعية

إعداد المعلمة: انتصارعمر الصانوري
مدرسة بنات الخنساء الثانوية -جنين

بإشراف: المشرف الأستاذ عماد عبد اللطيف قاسم

مديرية التربية والتعليم - جنين

٢٠٢٠-٢٠٢١

تمهيد

الصورة العامة للمعادلة الخطية هي: أس + ب = صفر أ، ب∈ ح ، أ ≠صفر

حل المعادلةالخطية هو س = $-\frac{ب}{أ}$

مثال(١) : احل المعادلة ٣س - ٤ = ١١

الحل:

بجمع العدد ٤ لطرفي المعادلة ٣ س = ١٥

بقسمة الطرفين على ٣ ⟵ س = ٥

مثال(٢) : احل المعادلة ٦ - ٢س = ٨

الحل:

بطرح العدد ٦ من طرفي المعادلة - ٢س = ٢

بقسمة طرفي المعادلة على - ٢ ⟵ س = - ١

مثال(٣) : احل المعادلة ٨س – ١٦ = صفر

الحل:

بجمع العدد ١٦ لطرفي المعادلة ٨ س = ١٦

بقسمة الطرفين على ٨ ⟵ س = ٢

مثال(٤) : احل المعادلة ٤س – ٨ = ٧س + ١٣

الحل:

بطرح ٤س من طرفي المعادلة - ٨ = ٣س + ١٣

بطرح ١٣ من الطرفين - ٢١ = ٣س

بقسمة الطرفين على ٣ ⟵ س = - ٧

انتصار الصانوري

حل المعادلة التربيعية

الصورة العامة للمعادلة التربيعية هي:

$$أ\ س^{٢} + ب\ س + جـ = صفر$$

أ: معامل $س^{٢}$ ، ب : معامل س ، جـ : الحد المطلق

$$أ ، ب ، جـ \in ح ، أ \neq صفر$$

مراجعة في حل المعادلة التربيعية: أ س^{٢} + ب س + جـ = صفر

أولاً: إذا كانت المعادلة على الصورة أ س^{٢} + ب س = صفر

في هذه الحالة نلاحظ عدم وجود حد مطلق ، أي أن جـ = صفر

يكون الحل:

بإخراج س عامل مشترك ، ثم مساواة المقادير الناتجة بالصفر وحل المعادلات الخطية الناتجة

مثال(١) : أحل المعادلة س^{٢} + ٨ س = صفر

الحل:

س^{٢} + ٨ س = صفر

س × س + ٨ × س = صفر

باخراج س عامل مشترك س (س + ٨) = صفر

اما س = صفر أو س + ٨ = صفر

س = صفر أو س = -٨

انتصار الصانوري

مثال(٢) : أحل المعادلة $٦س^{٢} = س$

الحل:

$٦س^{٢} = س$

بطرح س من طرفي المعادلة

$٦ س^{٢} - س = صفر$

$٦ \times س \times س - ١ \times س = صفر$

باخراج س عامل مشترك

$س (٦س - ١) = صفر$

اما $س = صفر$ أو $٦س - ١ = صفر$

$س = صفر$ أو $٦س = ١$

$س = صفر$ أو $س = \frac{١}{٦}$

مثال(٣) : أحل المعادلة ٢س^{٢} + ٤س = - س

الحل: ٢س^{٢} + ٤ س = - س

بجمع س لطرفي المعادلة ٢س^{٢} + ٥ س = صفر

٢س× س+ ٥× س = صفر

باخراج س عامل مشترك س (٢س + ٥) = صفر

س = صفر أو ٢س + ٥ = صفر

س = صفر أو ٢س = -٥

س = صفر أو س = -٢,٥

ثانياً : إذا كانت المعادلة على الصورة $أ\ س^{٢} + جـ = صفر$

في هذه الحالة نلاحظ عدم وجود حد أوسط ، أي أن ب = صفر

يكون الحل:

بجعل $س^{٢}$ موضوع القانون ثم نأخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة.

مثال(١): أحل المعادلة $س^{٢} - ٢٥ = صفر$

بجمع ٢٥ لطرفي المعادلة $س^{٢} = ٢٥$

بأخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة $\sqrt{س^{٢}} = \sqrt{٢٥}$

$س = ٥ ، -٥$

مثال(٢): أحل المعادلة $٣س^{٢} - ٤٨ = صفر$

بجمع ٤٨ لطرفي المعادلة $٣س^{٢} = ٤٨$

بقسمة طرفي المعادلة على ٣ $س^{٢} = ١٦$

بأخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة

$$\sqrt{س^{٢}} = \sqrt{١٦}$$

$$س = ٤ ، -٤$$

مثال(٣): أحل المعادلة $٣س^{٢} + ١٢ = صفر$

بطرح ١٢ من طرفي المعادلة $٣س^{٢} = -١٢$

بقسمة طرفي المعادلة على ٣ $س^{٢} = -٤$

بأخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة $\sqrt{س^{٢}} = \sqrt{-٤}$

$س = \pm \sqrt{-٤}$ $\notin ح$

مجموعة الحل: $\emptyset$

ثالثاً: إذا كانت المعادلة على الصورة $أ\ س^{٢} + ب\ س + جـ = صفر$ ، $أ، ب، جـ \neq صفر$

عند استخدام التحليل

إذا كان $أ = ١$

إذا كان الحد المطلق موجب

العددان داخل الأقواس متشابهان في الإشارة

اشارتهما نفس إشارة الحد الأوسط

(أي أن العمليتان داخل الاقواس متشابهتان)

حاصل ضربهما هو الحدالمطلق

وجمعهما هو معامل س

إذا كان الحد المطلق سالب

العددان داخل الأقواس مختلفان في الإشارة

إشارة العدد الاكبر نفس إشارة الحد الأوسط

(إي أن العمليتان داخل الاقواس متعاكستان جمع وطرح)

حاصل ضربهما هو الحدالمطلق

والفرق بينهما هو معامل س

إذا كانت المعادلة على الصورة $أ\ س^{٢} + ب\ س + جـ = صفر$ ، $أ، ب، جـ \neq صفر$

١) إذا كانت أ = ١ (عند استخدام التحليل)

الحالة الأولى:

إذا كان الحد المطلق **موجب** (**جـ موجبة**) فإن العددين في القوسين لهما **نفس اشارة الحد الاوسط (ب)**.

في هذه الحالة نبحث عن عددين **حاصل ضربهما جـ** و**ناتج جمعهما ب.**

مثال (١): جد مجموعة حل المعادلة $س^{٢} + ١٤ س + ٤٨ = صفر$

الحل:

$س^{٢} + ١٤ س + ٤٨ = صفر$

١) اشارة الحد المطلق **موجبة(جمع)** اذاً العددان داخل الأقواس **متشابهان** في الإشارة
(أي أن العمليتان داخل الاقواس **متشابهتان**)

٢) إشارتهما نفس اشارة الحد الاوسط،إذاً **موجبان**.
(أي أن العمليتان داخل الاقواس **جمع**)

٣) الحد المطلق ٤٨ هو ناتج ضرب العددين

٤) الحد المطلق **موجب(جمع)** ، إذاً معامل س في الحد الأوسط وهو ١٤ناتج **جمع العددين**

نفكر في عددين ناتج ضربهما ٤٨ وناتج جمعهما ١٤ وهما: ٨،٦

$(س + ٨) (س + ٦) = صفر$

إما س= -٨ ، أو س = -٦ ، مجموعة الحل : $\{ -٨ ، -٦ \}$

انتصار الصانوري

مثال (٢) :

جد مجموعة حل المعادلة $س^{٢} - ١١ س + ٢٨ =$ صفر

الحل:

١) اشارة الحد المطلق **موجبة** اذاً العددان **متشابهان** في الإشارة

(أي أن العمليتان داخل الاقواس **متشابهتان**)

٢) إشارتهما نفس إشارة الحد الأوسط إذاً **العددان سالبان**

(أي أن العمليتان داخل الاقواس **طرح**)

$س^{٢} - ١١ س + ٢٨ =$ صفر

٣) الحد المطلق٢٨ هو ناتج **ضرب العددين**

٤) **الحد المطلق موجب(جمع)** إذاً معامل س في الحد الأوسط وهو ١١ناتج **جمع العددين**

نفكر في عددين ناتج ضربهما ٢٨ وناتج جمعهما ١١ وهما: ٤،٧

(س - ٧) (س - ٤) = صفر

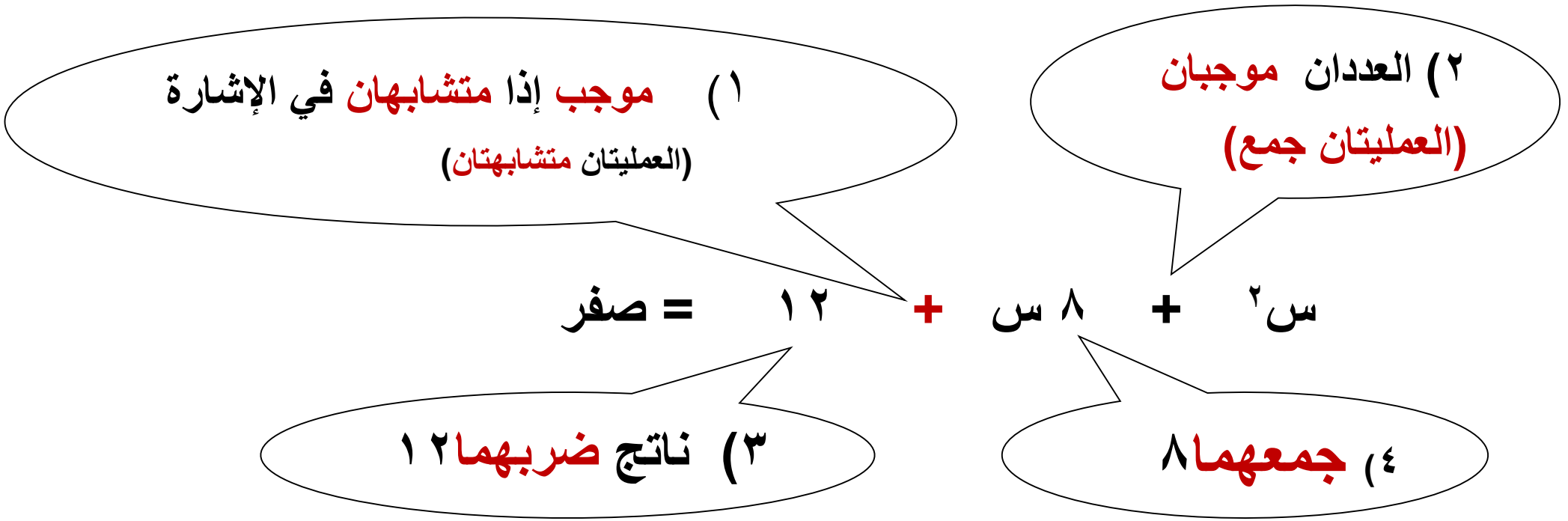
اما س= ٧ ، أو س = ٤

مجموعة الحل : { ٧، ٤ }

انتصار الصانوري

مثال (٣) : جد مجموعة حل المعادلة $س^{٢} + ٨س + ١٢ = صفر$

الحل:



نبحث عن عددين ضربهما ١٢ وجمعهما ٨ : العددان هما ٢، ٦

$(س+٦)(س+٢) = صفر$

اما $س = -٦$ أو $س = -٢$

مجموعة الحل : $\{-٦، -٢\}$

انتصار الصانوري

مثال (٤) : جد مجموعة حل المعادلة $س^{٢} - ٩س + ١٨ = صفر$

الحل:

١) موجب إذا متشابهان في الاشارة (العمليتان داخل الاقواس متشابهتان)

٢) العددان سالبان (العمليتان طرح)

$$س^{٢} - ٩ س + ١٨ = صفر$$

٣) ناتج ضربهما ١٨

٤) جمعهما ٩

نبحث عن عددين ضربهما ١٨ وجمعهما ٩ وهما: ٦،٣

$$(س - ٦) (س-٣) = صفر$$

إما $س = ٦$ أو $س = ٣$

مجموعة الحل : $\{ ٦ ، ٣ \}$

انتصار الصانوري

الحالة الثانية:

إذا كان الحد المطلق سالب (جـ سالبة) فإن العددين في القوسين لهما اشارتان مختلفتان،واشارة العدد الاكبرهي نفس اشارة الحد الاوسط (ب)

في هذه الحالة نبحث عن عددين حاصل ضربهما جـ وناتج طرحهما ب

مثال(١): جد مجموعة حل المعادلة $س^{٢} + ٧ س - ١٨ = صفر$

الحل:

$س^{٢} + ٧ س - ١٨ = صفر$

١) الحد المطلق سالب اذاً العددان داخل الأقواس مختلفان في الإشارة (العمليتان مختلفتان)

٢) بما أن العددين مختلفان في الإشارة ، إذاً إشارة العدد الأكبر نفس إشارة الحد الأوسط. هنا موجبة(العملية جمع عند العدد الأكبر)

٣) الحد المطلق ١٨ هو ناتج ضرب العددين

٤) بما أن اشارة الحد المطلق سالبة(طرح) ، إذاً معامل س في الحد الأوسط وهو٧ ناتج طرح العددين

اذاً نبحث عن عددين حاصل ضربهما ١٨ وناتج طرحهما ٧ وهما : ٩،٢(العدد الأكبر وهو٩ نعطيه اشارة موجبة(العمليةجمع) نفس اشارة الحد الأوسط ، والعدد الأصغر ٢ نعطيه إشارة سالبة (العملية طرح) عكس إشارة الحد الأوسط)

$(س + ٩) (س - ٢) = صفر$

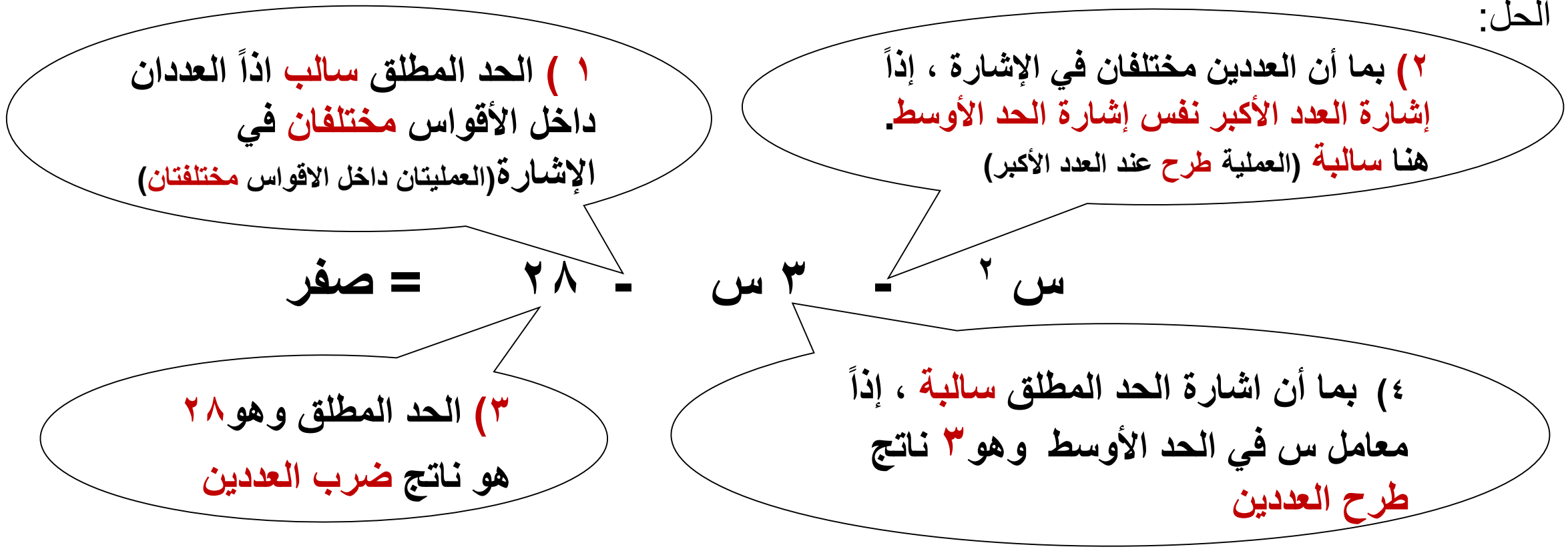
اما $س = -٩$ ، أو $س = ٢$

مجموعة الحل : $\{ -٩ ، ٢ \}$

انتصار الصانوري

مثال(٢): جد مجموعة حل المعادلة : $س^{٢} - ٣ س - ٢٨ = صفر$

الحل:



نبحث عن عددين ضربهما ٢٨والفرق بينهما ٣ وهما ٧ ، ٤ (العدد الأكبر هو٧ نعطيه اشارة سالبة (العملية طرح)نفس اشارة الحد الوسط والعدد الأصغر ٤ نعطيه إشارة موجبة(العملية جمع) عكس إشارة الحد الاوسط)

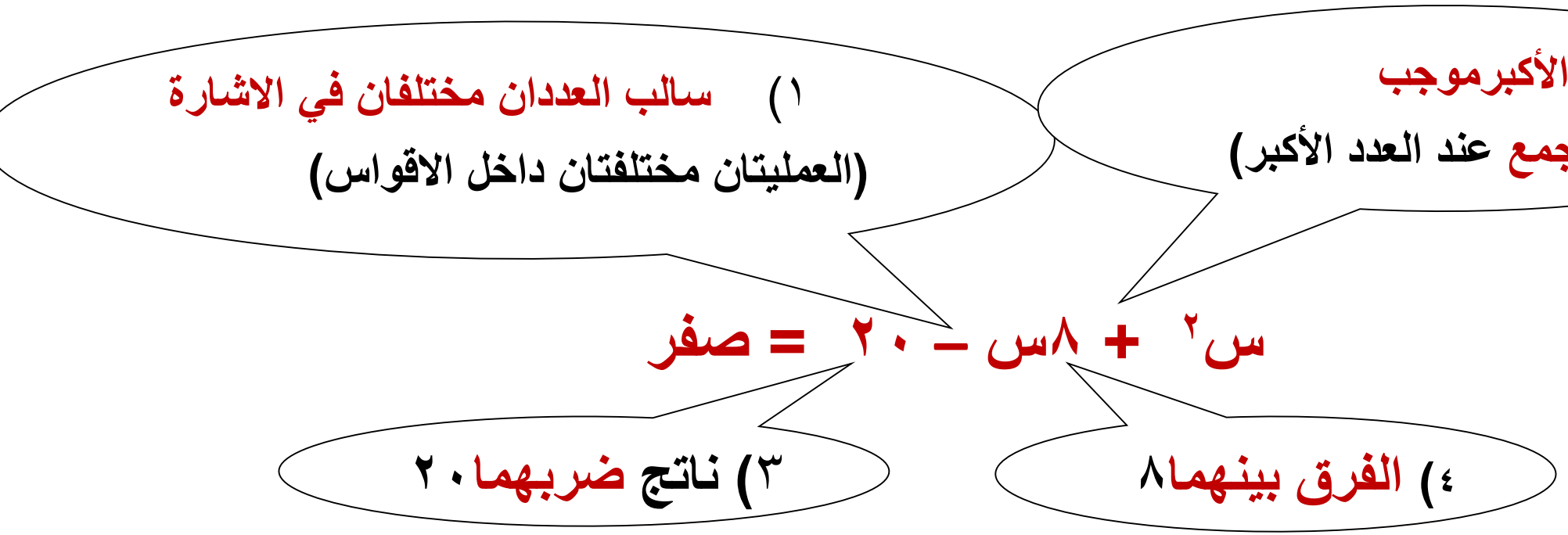
$(س - ٧) (س + ٤) = صفر$

اما س= ٧ ، إو س = -٤

مجموعة الحل : $\{ -٤ ، ٧ \}$

مثال(٣) : جد مجموعة حل المعادلة $س^{٢} + ٨س - ٢٠ = صفر$

الحل:



نبحث عن عددين ضربهما ٢٠ والفرق بينهما ٨ : وهما ٢، ١٠ (العدد الأكبر وهو ١٠ نعطيه اشارة موجبة (العملية جمع) نفس اشارة الحد الأوسط والعدد الأصغر ٢ عكس إشارة الحد الأوسط سالب (العملية طرح))

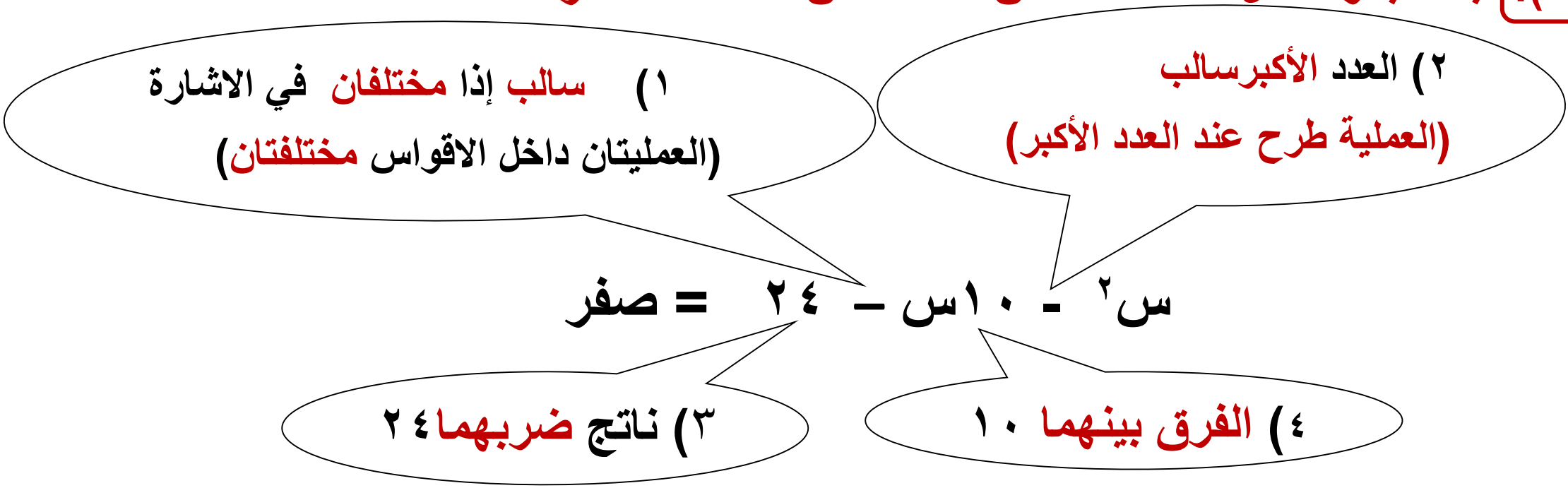
$(س + ١٠)(س - ٢) = صفر$

اما $س = -١٠$ او $س = ٢$ مجموعة الحل : $\{-١٠ ، ٢\}$

انتصار الصانوري

مثال(٤): جد مجموعة حل المعادلة $س^{٢} - ١٠س - ٢٤ = صفر$

الحل:



نبحث عن عددين حاصل ضربهما ٢٤ والفرق بينهما ١٠ وهما: ١٢،٢ (العدد الاكبر وهو ١٢ نعطيه اشارة سالبة (العملية طرح) نفس اشارة الحد الأوسط ، والعدد الأصغر عكس إشارة الحد الأوسط موجبة(العملية جمع))

$(س - ١٢)(س + ٢) = صفر$

اما $س = ١٢$ أو $س = -٢$

مجموعة الحل : $\{ ١٢ ، -٢ \}$

انتصار الصانوري

الهدف: أن نحل المعادلة التربيعية أ س ^{٢} + ب س + جـ = صفر

٢) إذا كانت أ ≠ ١ ، أ ، ب، جـ ≠ صفر

خطوات الحل

١) نجد ناتج الضرب أ × جـ ونستبدل جـ بناتج الضرب مع جعل معامل س^{٢} = ١.

٢) نحلل المقدار الى قوسين.

٣) نقسم الاعداد داخل القوسين على أ، فإذا كان ناتج القسمة عدد صحيح نكتبه كما نتج، واذا كان الناتج كسر ، نضرب القوس بالعدد (أ).

٤) نساوي المقادير داخل الأقواس بالصفر ونحل المعادلات الخطية الناتجة.

انتصار الصانوري

مثال(١) : جد مجموعة حل المعادلة :

الحل: $٥ س^{٢} + ١٢ س + ٤ = صفر$

١) نجد ناتج الضرب ٥×٤ = ٢٠ ونستبدل جـ التي هي ٤ بالناتج ٢٠ مع جعل معامل س ٢ يساوي ١

تصبح المعادلة $س^{٢} + ١٢س + ٢٠ = صفر$

٢) نحللها إلى أقواس $(س+٢)\ (س+١٠) = صفر$

٣) نقسم الأعداد في القوسين على أ = ٥ فينتج :

$$(س+\frac{٢}{٥})\ (س+\frac{١٠}{٥}) = صفر \quad \Leftarrow \quad (س+\frac{٢}{٥})\ (س+٢) = صفر$$

هنا ناتج القسمة عدد غير صحيح

لذلك نضرب القوس كله في أ =٥

هنا ناتج القسمة عدد صحيح إذاً نبقيه كماهو

فتصبح المعادلة: $(٥س+٢)\ (س+٢) = صفر$

إما $س = -\frac{٢}{٥}$ أو $س = -٢$

مجموعة الحل : $\{-\frac{٢}{٥}\ ،\ -٢\}$

انتصار الصانوري

مثال(٢) : جد مجموعة حل المعادلة $٣س^{٢} - ٧س + ٤ = صفر$

الحل: $٣س^{٢} - ٧س + ٤ = صفر$

١) نجد ناتج الضرب ٣×٤ = ١٢ ونستبدل جـ التي هي ٤ بالناتج١٢ مع جعل معامل س ٢ يساوي ١

تصبح المعادلة $س^{٢} - ٧س + ١٢ = صفر$

٢) نحللها إلى أقواس $(س - ٤)(س - ٣) = صفر$

٣) نقسم الأعداد في القوسين على أ = ٣ فينتج : $(س - \frac{٤}{٣})(س - \frac{٣}{٣}) = صفر$

$(س - \frac{٤}{٣})(س - ١) = صفر$

هنا ناتج القسمة عدد غير صحيح لذلك نضرب القوس كله في أ =٣

هنا ناتج القسمة عدد صحيح ١ إذاً نبقيه كماهو

$(٣س - ٤)(س - ١) = صفر$

اما $س = \frac{٤}{٣}$ أو س= ١

مجموعة الحل : $\{ \frac{٤}{٣} ، ١ \}$

انتصار الصانوري

مثال(٣): جد/ي مجموعة حل المعادلة $٤ س^{٢} - ٧س - ٢ = صفر$

١) نجد ناتج الضرب ٤×٢ = ٨ ونستبدل جـ التي هي ٢ بالناتج٨ مع جعل معامل س ٢ يساوي ١

تصبح المعادلة $س^{٢} - ٧س - ٨ = صفر$

٢) نحللها إلى أقواس $(س - ٨)(س + ١) = صفر$

٣) نقسم الأعداد في القوسين على أ = ٤ فينتج : $(س - \frac{٨}{٤})(س + \frac{١}{٤}) = صفر$

$(س - ٢)(س + \frac{١}{٤}) = صفر$

هنا ناتج القسمة عدد صحيح ٢ إذاً نبقيه كماهو

هنا ناتج القسمة عدد غير صحيح لذلك نضرب القوس كله في أ = ٤

$(س-٢)(٤س+١) = صفر$

اما س=٢ أو س= $-\frac{١}{٤}$

مجموعة الحل : $\{ ٢ ، -\frac{١}{٤} \}$

حل المعادلة التربيعية : أس^{٢} + ب س + جـ = صفر ، أ ≠ صفر ، أ،ب،جـ ∋ ح

باستخدام المميز والقانون العام

المميز = ب ^{٢} - ٤ أ جـ

إذا كان المميز

سالب → لا يوجد حل للمعادلة → مجموعة الحل ∅

موجب → يوجد حلان مختلفان للمعادلة → نستخدم القانون العام:

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢أ}$$

صفر → يوجد حل واحد للمعادلة → $س = \frac{-ب}{٢أ}$

انتصار الصانوري

١) المميز < صفر(سالب) فإن المعادلة ليس لها حل ، أي أن مجموعة الحل = Ø

مثال(١) : جد مجموعة حل المعادلة ٣ س ٢ + ٥ س + ٤ = صفر

الحل: أ = ٣ ، ب = ٥ ، جـ = ٤

المميز = ب ٢ – ٤ أ جـ

= (٥)٢ ـ ٤×٣×٤

= ٢٥ ـ ٤٨

المميز = ـ ٢٣ بما أن المميز سالب إذاً مجموعة الحل = Ø

مثال(٢) : جد مجموعة حل المعادلة ـ س ٢ + ٣ س ـ ٦ = صفر

الحل: أ = ـ١ ، ب = ٣ ، جـ = ـ٦

المميز = ب ٢ – ٤ أ جـ

= (٣)٢ ـ ٤×ـ١×ـ٦

= ٩ ـ ٢٤

المميز = ـ ١٥ بما أن المميز سالب إذاً مجموعة الحل = Ø

٢) المميز = صفر فإن للمعادلة حل واحد هو س= $\frac{-ب}{٢أ}$

مثال (١): جد مجموعة حل المعادلة ٤ س ٢ - ١٢ س + ٩ = صفر

الحل: أ= ٤ ، ب = - ١٢ ، جـ = ٩

المميز = ب ٢ – ٤ أ جـ

= (-١٢) ٢ – ٤ × ٤ × ٩

= ١٤٤ - ١٤٤

المميز = صفر إذاً يوجد حل واحد للمعادلة هو

س= $\frac{-ب}{٢أ}$

س= $\frac{-(-١٢)}{٢ \times ٤}$ ← س= $\frac{١٢}{٨}$ = ١,٥ **مجموعة الحل:** {١,٥}

مثال (٢) : جد مجموعة حل المعادلة $س^{٢} + ٨ س + ١٦ = صفر$

الحل: $أ = ١$ ، $ب = ٨$ ، $جـ = ١٦$

المميز $= ب^{٢} - ٤ أ جـ$

$= (٨)^{٢} - ٤ \times ١ \times ١٦$

$= ٦٤ - ٦٤$

المميز = صفر إذاً يوجد حل واحد للمعادلة هو

$$س = \frac{-ب}{٢أ}$$

$$س = \frac{-(٨)}{٢ \times ١} \leftarrow س = \frac{-٨}{٢} = -٤$$

مجموعة الحل: $\{ -٤ \}$

انتصار الصانوري

٣) المميز > صفر (موجب) يوجد حلان للمعادلة ، نستخدم القانون العام لإيجادهما

مثال(١) : جد مجموعة حل المعادلة ٢ س ٢ + ٧ س - ٤ = صفر

الحل: أ = ٢ ، ب = ٧ ، جـ = - ٤

المميز = ب ٢ – ٤ أ جـ

= (٧) ٢ - ٤ × ٢ × - ٤

= ٤٩ - - ٣٢

المميز = ٨١ (موجب) يوجد حلان للمعادلة

نستخدم القانون العام : $س = \frac{- ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$

$س = \frac{- (٧) \pm \sqrt{٨١}}{٢ \times ٢} = \frac{٧ \pm ٩}{٤}$

إما $س = \frac{٧ + ٩}{٤}$ ← $س = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

أو $س = \frac{٧ - ٩}{٤}$ ← $س = \frac{- ١٦}{٤} = - ٤$

مجموعة الحل: = $\left\{ - ٤ ، \frac{١}{٢} \right\}$

انتصار الصانوري

مثال(٢) : جد مجموعة حل المعادلة س ٢ ـ ١٤ س + ٢٤ = صفر

الحل: أ = ١ ، ب = ـ ١٤ ، جـ = ٢٤

المميز = ب ٢ – ٤ أ جـ

= (ـ ١٤)٢ ـ ٤ × ١ × ٢٤

= ١٩٦ ـ ٩٦

المميز = ١٠٠ (موجب) يوجد حلان للمعادلة

نستخدم القانون العام : $س = \frac{- ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢أ}$

$س = \frac{- (-١٤) \pm \sqrt{١٠٠}}{١ \times ٢} = \frac{١٤ \pm ١٠}{٢}$

إما $س = \frac{١٤ - ١٠}{٢}$ ← $س = \frac{٤}{٢} = ٢$

أو $س = \frac{١٤ + ١٠}{٢}$ ← $س = \frac{٢٤}{٢} = ١٢$

مجموعة الحل: { ٢ ، ١٢ }

انتصار الصانوري

أعزائي الطلبة : اتمنى منكم حل المعادلات التالية والتحقق من صحة الحل ،من خلال مقارنة اجابتكم مع الإجابة النهائية المقابلة لكل معادلة .

١) $س^{٢} + ٩ س = صفر$	٠ ، ٩-
٢) $٢س^{٢} - ٤ س = س^{٢}$	٠ ، ٤
٣) $س^{٢} - ٣٦ = صفر$	٦ ، ٦-
٤) $-٢س^{٢} + ١٨ = صفر$	٣ ، ٣-
٥) $٣س^{٢} - ١٠ = ٢$	٢ ، ٢-
٦) $س^{٢} + ٥س + ٦ = صفر$	٢- ، ٣-
٧) $س^{٢} - ٦س + ٨ = صفر$	٢ ، ٤
٨) $س^{٢} + ٢س - ١٥ = صفر$	٥- ، ٣
٩) $س^{٢} - ٥س - ١٤ = صفر$	٧ ، ٢-
١٠) $٣س^{٢} - ٥س - ٨ = صفر$	$-١ ، \frac{٨}{٣}$