التكامل بالتعويض

يستخدم لايجاد تكاملات على الصورة :

١) اذا كان داخل التكامل مقدار خطي مرفوع لقوة : $\int (أ س + ب)^{ن}$ د س

هنا نفرض ص ماداخل القوس (دون القوة) ← **نفرض ص = أ س + ب**

---

٢) اذا كان داخل التكامل حاصل ضرب قوسين ،احدهما مرفوع لقوة(بحيث يكون القوس الثاني عبارة عن مشتقة القوس الاول(المرفوع للقوة) او مضاعفاتها) نفرض المقداراداخل القوس المرفوع للقوة ص.

$\int (ق'(س)) (ق(س))^{ن}$ د س

هنا نفرض ص المقدار داخل القوس المرفوع للقوة(دون القوة) ← **نفرض ص = ق(س)**

---

٣) اذا كان داخل التكامل جذر لكثير حدود مكون من اكثر من حد :

أ) جذر لاقتران خطي $\int \sqrt[ن]{(أس+ب)^{م}}$ دس

هنا نفرض ص المقدار تحت الجذر(دون القوة أو الجذر) ← **ص =** أس +ب

ب) جذر لاقتران غير خطي مشتقته خارج الجذر

$\int (ق'(س)) \sqrt[ن]{(ق(س))^{م}}$ د س

نفرض ص المقدار تحت الجذر (دون القوة او الجذر) ← **ص = ق(س)**

---

٤) تكامل على الصورة $\int ق'(س) \times هـ^{(ق(س))}$ دس

هنا نفرض ص = ق(س) .

خطوات ايجاد التكامل بالتعويض

١) نفرض ص المقدار داخل القوة أو تحت الجذر كما ذكرنا سابقاً.

٢) نجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ (نشتق).

٣) نجد دس بالضرب التبادلي ← دس = $\frac{\text{د ص}}{\text{المشتقة}}$

٤) نعوض في التكامل ص بدلا من المقدار الذي فرضناه ، ونعوض $\frac{\text{د ص}}{\text{المشتقة}}$ بدلا من دس .

٥) نحرص أن يكون المقدار داخل التكامل بدلالة ص وذلك من خلال اختصارات مناسبة،
(ممنوع ان تبقى س في داخل التكامل قبل ان نكامل) .

٦) نجد التكامل غير المحدود بحيث يكون الناتج بدلالة ص.

٧)نعوض في الاجابة بدلا من ص قيمتها بدلالة س مع الانتباه للابقاء على القوة او الجذر ان وجد .

٨) اذا كان التكامل محدود نعوض(تعويض الحد العلوي – تعويض الحد السفلي) في الاجابة النهائية للتكامل غير المحدود.

مثال(١) : جد $\int (٤س + ٥)^{٦}$ دس

الحل:

نفرض ص = ٤ س + ٥

نشتق : $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ٤

دس = $\frac{\text{د ص}}{\text{المشتقة}}$ ← دس = $\frac{\text{د ص}}{٤}$

نعوض ص بدلا من قيمتها، وقيمة (د س) في التكامل المطلوب

المطلوب = $\int ص^{٦} \frac{\text{د ص}}{٤}$

$= \frac{١}{٤} \times \frac{ص^{٧}}{٧} + جـ = \frac{ص^{٧}}{٢٨} + جـ = \frac{(٤س + ٥)^{٧}}{٢٨} + جـ$

مثال(٢) : جد $\int$ (س+٢) $(س^{٢}+٤س)^{٣}$ دس (وزاري ريادي٢٠١٩)

الحل: نفرض ص = $س^{٢}+٤س$

نشتق $\frac{د ص}{د س}$ = ٢س +٤

دس = $\frac{د ص}{المشتقة}$ ← دس = $\frac{د ص}{٢س+٤}$

نعوض ص بدلا من قيمتها ، وقيمة (د س) في التكامل المطلوب

المطلوب = $\int$ (س+٢) $ص^{٣}$ $\frac{د ص}{٢س+٤}$

= $\int$ (س+٢) $ص^{٣}$ $\frac{د ص}{٢(س+٢)}$

= $\int ص^{٣}$ $\frac{د ص}{٢}$

= $\frac{١}{٢}$ × $\frac{ص^{٤}}{٤}$ + جـ = $\frac{ص^{٤}}{٨}$ + جـ

= $\frac{(س^{٢}+٤س)^{٤}}{٨}$ + جـ

مثال (٣) : جد $\int س^{٢}$ $(س^{٣}+١)^{-٢}$ دس (ريادي وزاري الدورة الثانية ٢٠١٩)

الحل : نفرض ص = $س^{٣}+١$

نشتق $\frac{د ص}{د س}$ = $٣س^{٢}$

دس = $\frac{د ص}{المشتقة}$ ← دس = $\frac{د ص}{٣س^{٢}}$

نعوض ص بدلا من قيمتها وقيمة (د س) في التكامل المطلوب

المطلوب = $\int س^{٢}$ $ص^{-٢}$ $\frac{د ص}{٣س^{٢}}$

= $\int ص^{-٢}$ $\frac{د ص}{٣}$

انتصار الصانع

$$= \frac{1}{3} \times \frac{ص^{-1}}{-1} + جـ = - \frac{ص^{-1}}{3} + جـ$$

$$= - \frac{(س^3 + 1)^{-1}}{3} + جـ$$

مثال (٤) : جد $\int (٢ س + ١) \sqrt{س^2 + س + ٤}$ دس (وزاري تكنولوجي ٢٠١٩)

الحل: نفرض ص = $س^2 + س + ٤$

نشتق $\frac{د ص}{د س}$ = ٢س + ١

دس = $\frac{د ص}{\text{المشتقة}}$ ← دس = $\frac{د ص}{٢س + ١}$

المطلوب = $\int (٢ س + ١) \sqrt{ص}$ $\frac{د ص}{٢س + ١}$

$$= \int \sqrt{ص} \, د ص$$

$$= \int ص^{\frac{1}{2}} \, د ص$$

$$= \frac{ص^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + جـ$$

$$= \frac{2}{3} ص^{\frac{3}{2}} + جـ$$

$$= \frac{2}{3} (س^2 + س + ٤)^{\frac{3}{2}} + جـ$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{(س^2 + س + ٤)^3} + جـ$$

$$= \frac{2 \sqrt{(س^2 + س + ٤)^3}}{3} + جـ$$

انتصار الصانوري

مثال (٥) : جد $\int$ (٢ س-٣) $\sqrt[٣]{(س^{٢} - ٣س + ١)}$ دس

الحل:

نفرض ص = $س^{٢}$ – ٣س + ١

نشتق $\frac{د ص}{د س}$ = ٢س -٣

د س = $\frac{د ص}{٢س-٣}$

نعوض ص بدلا من قيمتها وقيمة (د س) في التكامل المطلوب

المطلوب = $\int$ (٢ س-٣) $\sqrt[٣]{ص}$ $\frac{د ص}{٢س-٣}$

= $\int ص^{\frac{٣}{٥}}$ دص

= $\frac{ص^{\frac{٨}{٥}}}{\frac{٨}{٥}}$ + جـ

= $\frac{٥}{٨}$ $\sqrt[٨]{ص^{٨}}$ + جـ

= ٥ $\frac{\sqrt[٨]{(س^{٢} - ٣س + ١)^{٨}}}{٨}$ + جـ

مثال(٦) : جد $\int$ (أ س + ب) ^{ن} دس

الحل:

نفرض ص = أ س + ب

نشتق : $\frac{د ص}{د س}$ = أ

دس = $\frac{د ص}{المشتقة}$ ← دس = $\frac{د ص}{أ}$

انتصار الصانوري

نعوض ص بدلا من قيمتها ، وقيمة (د س) في التكامل المطلوب

المطلوب = $\int$ ص^{ن} $\frac{د ص}{أ}$

$= \frac{١}{أ} \times \frac{ص^{ن+١}}{ن+١} + جـ = \frac{ص^{ن+١}}{أ(ن+١)} + جـ$

$= \frac{(أس + ب)^{ن+١}}{أ(ن+١)} + جـ$

نتيجة: $\int (أ س + ب)^{ن}$ دس $= \frac{(أس + ب)^{ن+١}}{أ(ن+١)} + جـ$

يمكن استخدام النتيجة السابقة في الاسئلة الموضوعية (اختيار من متعدد)

مثال(٧) : $\int (٢ س + ٣)^{٦}$ دس = (وزاري ريادي الدورة الثانية ٢٠١٩)

أ) $(٢ س + ٣)^{٧} + جـ$ ب) $١٢(٢ س + ٣)^{٥} + جـ$

جـ) $\frac{(٢ س + ٣)^{٧}}{١٤} + جـ$ د) $\frac{(٢ س + ٣)^{٧}}{٧} + جـ$

الحل: حسب النتيجة السابقة:

المطلوب = $\frac{(٢س + ٣)^{٦+١}}{٢(٦+١)} + جـ$

$= \frac{(٢س + ٣)^{٧}}{٢ \times ٧} + جـ$

$= \frac{(٢س + ٣)^{٧}}{١٤} + جـ$

اذا الاجابة فرع جـ

انتصار الصانوري

مثال(٨) : أي التالية تمثل $\int$ ق(س) ق$'$(س) دس (تكنولوجي وزاري ٢٠١٩)

أ) (ق(س))^{٢} +جـ ب) $\frac{١}{٢}$ (ق(س))^{٢} +جـ جـ) ق(س)+جـ د) ق$'$(س) +جـ

الحل: نفرض ص = ق(س)

نشتق $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ق$'$(س)

دس = $\frac{\text{د ص}}{\text{المشتقة}}$ ← دس = $\frac{\text{د ص}}{\text{ق}'(\text{س})}$

نعوض ص بدلا من قيمتها، وقيمة (د س) في التكامل المطلوب

المطلوب = $\int$ ص ق$'$(س) $\frac{\text{د ص}}{\text{ق}'(\text{س})}$

= $\int$ ص دص

= $\frac{\text{ص}^{٢}}{٢}$ + جـ

= $\frac{١}{٢}$ ص^{٢} + جـ

= $\frac{١}{٢}$ (ق(س))^{٢} +جـ اذاً الاجابة فرع ب

اذا كان التكامل محدود نقوم بنفس الخطوات للتكامل غير المحدود ثم نعوض في الخطوة الاخيرة في الاجابة النهائية

انصار الصانوري

مثال (٩) : احسب $\int_{٢}^{٣}$ س(س^{٢} - ٨)^{٢} دس (تكنولوجي وزاري الدورة الثانية ٢٠١٩)

الحل:

نفرض ص = س^{٢} - ٨

نشتق $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ٢س

دس = $\frac{\text{د ص}}{\text{المشتقة}}$ ← دس = $\frac{\text{د ص}}{٢\text{س}}$

نعوض ص بدلا من قيمتها وقيمة (د س) في التكامل المطلوب

$\int$ س(س^{٢} - ٨)^{٢} دس = $\int$ س ص^{٢} $\frac{\text{د ص}}{٢\text{س}}$

= $\int$ ص^{٢} $\frac{\text{د ص}}{٢}$

= $\frac{١}{٢}$ × $\frac{\text{ص}^{٣}}{٣}$ + جـ = $\frac{\text{ص}^{٣}}{٦}$ + جـ

= $\frac{(\text{س}^{٢} - ٨)^{٣}}{٦}$ + جـ

$\int_{٢}^{٣}$ س(س^{٢} - ٨)^{٢} دس = $\left[\frac{(\text{س}^{٢} - ٨)^{٣}}{٦}\right]_{٢}^{٣}$

= $\frac{(٣)^{٢} - ٨)^{٣}}{٦}$ - $\frac{(٢)^{٢} - ٨)^{٣}}{٦}$

= $\frac{١}{٦}$ - $\frac{-٦٤}{٦}$ = $\frac{٦٥}{٦}$

انتصار الصانوري

مثال (١٠) : جد $\int_{-١}^{١}$ س (٣س-٢) (س^{٣} – س^{٢} + ٢)^{٣} دس (تكنولوجي وزاري٢٠١٩)

الحل: نفرض **ص =** س^{٣} – س^{٢} + ٢

نشتق $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ٣س^{٢} - ٢س

دس = $\frac{\text{د ص}}{\text{المشتقة}}$ ← **دس =** $\frac{\text{دص}}{\text{٣س}^{٢} - \text{٢س}}$

$\int$ س (٣س-٢) (س^{٣} – س^{٢} + ٢)^{٣} دس = $\int$ س (٣س-٢) (ص)^{٣} $\frac{\text{دص}}{\text{٣س}^{٢} - \text{٢س}}$

= $\int$ (٣س^{٢}-٢س) (ص)^{٣} $\frac{\text{دص}}{\text{٣س}^{٢} - \text{٢س}}$

= $\int$ ص^{٣} دص

= $\frac{\text{ص}^{٤}}{٤}$ + جـ

= $\frac{(\text{س}^{٣} – \text{س}^{٢} + ٢)^{٤}}{٤}$ + جـ

$\int_{-١}^{١}$ س (٣س-٢) (س^{٣} – س^{٢} + ٢)^{٣} دس = $\left[\frac{(\text{س}^{٣} – \text{س}^{٢} + ٢)^{٤}}{٤}\right]_{-١}^{١}$

= $\frac{(١)^{٣} – (١)^{٢} + ٢)^{٤}}{٤}$ - $\frac{(-١)^{٣} – (-١)^{٢} + ٢)^{٤}}{٤}$

= $\frac{١٦}{٤} - \frac{٠}{٤}$ = ٤

انتصار الصانوري

مثال(١١) : جد $\int_{١}^{٣}$ س $\sqrt{س^{٢}+٣}$ دس (وزاري ريادي الدورة الثالثة ٢٠١٩)

الحل:

نفرض ص = $س^{٢}+٣$

نشتق $\frac{د ص}{د س}$ = ٢س

د س = $\frac{د ص}{٢س}$

نعوض ص بدلا من قيمتها ، وقيمة (د س) في التكامل المطلوب

$\int$ س $\sqrt{س^{٢}+٣}$ دس = $\int$ $\frac{س}{٢س}$ $\sqrt{ص}$ $د ص$

= $\int$ $\frac{١}{٢}$ $ص^{\frac{١}{٢}}$ دص

= $\frac{١}{٢}$ $\frac{ص^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}}$ + جـ

= $\frac{١}{٣}$ $\sqrt{ص^{٣}}$ + جـ

= $\frac{\sqrt{(س^{٢}+٣)^{٣}}}{٣}$ + جـ

$\int_{١}^{٣}$ س $\sqrt{س^{٢}+٣}$ دس = $\frac{\sqrt{(٣^{٢}+٣)^{٣}}}{٣}$ - $\frac{\sqrt{(١^{٢}+٣)^{٣}}}{٣}$

= $\frac{\sqrt{(١٢)^{٣}}}{٣}$ - $\frac{\sqrt{(٤)^{٣}}}{٣}$

= $\frac{\sqrt{١٢^{٣}}}{٣}$ - $\frac{\sqrt{٤^{٣}}}{٣}$ = $\frac{٢٤\sqrt{٣} - ٨}{٣}$

انتصار الصانوري

مثال(١٢): جد $\int_{١}^{٣}$ ٢س ق′(س^{٢}) دس

علماً بأن ق(٩) = ٧ ، ق(١) = ٢ ، ق(٣) = -٤

الحل: نفرض ص = س^{٢}

نشتق $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ٢س

دس = $\frac{\text{د ص}}{\text{المشتقة}}$ ← دس = $\frac{\text{د ص}}{\text{٢س}}$

$\int$ ٢س ق′(س^{٢}) دس = $\int$ ٢س ق′(ص) $\frac{\text{د ص}}{\text{٢س}}$

= $\int$ ق′(ص) دص

= ق(ص) + جـ

= ق(س^{٢}) + جـ

$\int_{١}^{٣}$ ٢س ق′(س^{٢}) دس = $\Big|_{١}^{٣}$ ق(س^{٢})

= ق((٣)^{٢}) - ق((١)^{٢})

= ق(٩) - ق(١)

= ٧ - ٢ = ٥

انتصار الصانوري

مثال (١٣) : جد $\int$ س $(س+٢)^{٣}$ دس

الحل:

نفرض $ص = س + ٢$

نشتق $\frac{د ص}{د س} = ١$

$د س = د ص$

$$\int س (س+٢)^{٣} \, د س = \int س (ص)^{٣} \, د ص$$

نلاحظ هنا انه لايمكن اختصارس ،كذلك لا يمكن اجراء التكامل بوجود المتغيرين،لذلك نعوض مكان س بدلالة ص حيث

$ص = س+٢ \leftarrow س = ص - ٢$

$$\int س (س+٢)^{٣} \, د س = \int (ص-٢)(ص)^{٣} \, د ص$$

$$= \int (ص^{٤} - ٢ص^{٣}) \, د ص$$

$$= \frac{ص^{٥}}{٥} - ٢\frac{ص^{٤}}{٤} + جـ$$

$$= \frac{(س+٢)^{٥}}{٥} - \frac{(س+٢)^{٤}}{٢} + جـ$$

انصار الصابوني

مثال(١٤): اذا كان ميل المماس لمنحنى ك (س) يعطى بالعلاقة ك/ (س) = ٨ (٢س-٣)^{٣} جد ك (٣)
علما بان ك (س) يمر بالنقطة (١،٤) (وزاري ريادي الدورة الثالثة ٢٠١٩)

الحل: ك(س) = $\int$ ك/(س) دس

ك(س)= $\int$ ٨ (٢س-٣)^{٣} دس

نفرض ص = ٢س-٣

نشتق $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ٢

دس = $\frac{\text{د ص}}{\text{المشقة}}$ ← دس= $\frac{\text{د ص}}{٢}$

$\int$ ٨(٢س-٣)^{٣} دس = $\int$ ٨(ص)^{٣} $\frac{\text{د ص}}{٢}$

= $\int$ ٤ص^{٣} دص

= $\frac{٤\ ص^{٤}}{}$ +جـ

= ص^{٤} +جـ

ك(س) = (٢س-٣)^{٤} + جـ

ك(س) يمر بالنقطة (١،٤) ← ك(١)=٤

ك(١) = (٢(١)-٣)^{٤} + جـ

٤ = ١+جـ ← جـ = ٣

نعوض قيمة جـ :

ك(س) = (٢س-٣)^{٤} + ٣

المطلوب ك(٣)

ك(٣) = (٢(٣)-٣)^{٤} + ٣

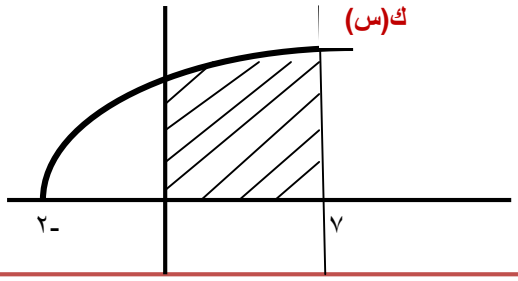
= (٦-٣)^{٤} + ٣

ك(٣) = (٣)^{٤} +٣ = ٨٤

انتصار الصانوري

مثال (١٥) : جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ك(س) = $\sqrt{٢س + ٤}$ ومحور السينات والمستقيمين س = صفر، س= ٧

(وزاري تكنولوجي ٢٠١٩)



الحل: المساحة = $\int_{٠}^{٧}$ ك(س) دس

م = $\int_{٠}^{٧} \sqrt{٢س + ٤}$ دس

نجد اولا التكامل غير المحدود بفرض ص = ٢س+٤

$\frac{د ص}{د س}$ = ٢ ← د س = $\frac{د ص}{٢}$

$\int \sqrt{٢س + ٤}$ دس = $\int \sqrt{ص} \frac{د ص}{٢}$

= $\frac{١}{٢}\int ص^{\frac{١}{٢}}$ دص

= $\frac{١}{٢} \times \frac{٢}{٣} \sqrt{ص^{٣}}$ +جـ

= $\frac{\sqrt{(٢س + ٤)^{٣}}}{٣}$ +جـ

م = $\int_{٠}^{٧} \sqrt{٢س + ٤}$ دس

= $\frac{\sqrt{(٢(٧) + ٤)^{٣}} - \sqrt{(٢(٠) + ٤)^{٣}}}{٣}$

= $\frac{\sqrt{(١٨)^{٣}} - \sqrt{(٤)^{٣}}}{٣}$ = $\frac{١٨ \times ١٨ \times ١٨} - ٨$ = $\frac{١٨ - ٨\sqrt{٩ \times ٢}}{٣}$

= $\frac{٥٤ - ٨\sqrt{٢}}{٣}$ وحدة مربعة

انضار الصانوري